# PRT球谐函数的数学原理


> 我的博客主页 https://chr.fan， 邮箱 Antares0982@gmail.com， 欢迎一起讨论！
>
> Antares 写于2022-3-6


图形学中PRT使用球谐函数来预计算光照信息。

网上找到的球谐函数的相关数学原理比较凌乱，有些讲的也不是很清楚，所以自己以数学专业的角度整理了一下。

用到的数学知识：

- 微积分（数学分析）
- 线性代数
- 复变函数
- 泛函分析（较少）

> 注意：下文中的单个字母上标，如果不是标在括号上，一律不代表“幂次”。

## 内积空间

考虑空间$L^2(S^2)$，即，在三维空间单位球表面上平方可积（模的平方在球面$S^2$上的积分存在且有限）的函数全体。在该空间上定义一个（复）内积（类比于向量的点乘、内积）

$$\langle f,\ g\rangle := \int_{S^2} f(w)\overline{g(w)}\,\mathrm{d}w.$$

这样的话，$\forall f \in L^2(S^2)$，

$$\|f\|^2 := \langle f, f\rangle = \int_{S^2} f(w)\overline{f(w)}\,\mathrm{d}w \geq 0.$$

即定义了一个范数$\|\cdot\|$（类比于向量的长度）。可以注意到，如上定义的内积总是有这样一些性质：

$$\begin{aligned}\langle f,g\rangle &= \overline{\langle g,f\rangle}\\ k\langle f,g\rangle &= \langle kf,g\rangle = \langle f,\bar{k}g\rangle,\ \forall k\in\mathbb{C}\\ \langle f_1+f_2,g\rangle &= \langle f_1,g\rangle+\langle f_2,g\rangle\end{aligned}$$

类比一般的线性空间，我们想找到一组正交系（正交基），这样就可以引入类似于坐标这样的概念。内积空间中的一组**规范正交系**，记为$(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$，需要满足：

$$\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij},$$

其中

$$\delta_{ij} = \begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\neq j.\end{cases}$$

## 连带勒让德多项式

**连带（也称伴随）勒让德多项式**是一组在$L^2[-1,1]$上的正交系。连带勒让德多项式记为$P_l^m(x)$，其中$0\le m\le l$，$m,l\in\mathbb{N}$。它没有简单的显式表达，但可以递推地求出。它满足

$$\int_{-1}^{1} P_l^m(x)P_k^m(x)\,\mathrm{d}x=\frac{2}{2l+1}\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\delta_{kl},$$

即，在$m$固定时，$P_l^m$与$P_k^m$正交，其中$l\ne k$。

对于$m<0$的情形，推广定义：

$$P_l^{-m}(x)=(-1)^m\frac{(l-m)!}{(l+m)!}P_l^m(x).$$

## 球谐函数（复数形式）

定义球谐函数如下：

$$Y_l^m(\theta,\varphi)=N_l^m P_l^m(\cos\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi},\quad -l\le m\le l,$$

其中$N_l^m$是归一化常数，即，$N_l^m$是使得$Y_l^m$与自身的内积为1（范数为1）的常数（总是实数）：

$$(N_l^m)^{-2}=\langle P_l^m(\cos\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi},\ P_l^m(\cos\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}\rangle.$$

考虑内积：

$$\langle Y_l^m,Y_k^n\rangle,$$

展开计算（注意到$\overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi}}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\varphi}$）：

$$\langle Y_l^m,Y_k^n\rangle=N_l^mN_k^n\int_{S^2}P_l^m(\cos\theta)P_k^n(\cos\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(m-n)\varphi}\,\mathrm{d}w.$$

拆开$\theta$和$\varphi$相关的项

$$\langle Y_l^m,Y_k^n\rangle=N_l^mN_k^n\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(m-n)\varphi}\,\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}P_l^m(\cos\theta)P_k^n(\cos\theta)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta.$$

- 如果$m\ne n$，那么

  $$\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(m-n)\varphi}\,\mathrm{d}\varphi=\int_0^{2\pi}\cos(m-n)\,\mathrm{d}\varphi+\mathrm{i}\int_0^{2\pi}\sin(m-n)\,\mathrm{d}\varphi=0.$$

  $m=n$时被积项退化为1，积分值为$2\pi$。于是

  $$\langle Y_l^m,Y_k^n\rangle=2\pi\delta_{mn}N_l^mN_k^n\int_0^{\pi}P_l^m(\cos\theta)P_k^n(\cos\theta)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta.$$

- 现在设$m=n$，由于连带勒让德函数的性质以及$t=\cos\theta$换元可以立即得出

  $$\langle Y_l^m,Y_k^m\rangle=2\pi N_l^mN_k^m\delta_{lk}.$$

通过以上讨论可以知道，当且仅当$l=k$且$m=n$时上述内积非0。又由$N_l^m$定义，我们得到

$$\langle Y_l^m,Y_k^n\rangle=\delta_{lk}\delta_{mn},$$

从而全体复球谐函数成为一组规范正交系。

## 球谐函数直角坐标表示

**引理.** $Y_l^m(x,y,z)$是关于$x,y,z$的$l$次多项式，可以写成关于$z$的$l-|m|$次多项式与关于$x,y$的$|m|$次齐次多项式$(x\pm \mathrm{i}y)^{|m|}$的乘积。

*Proof.* 先考虑$m\geq 0$的情形。

$$Y_l^m(\theta,\varphi)=N_l^m P_l^m(\cos\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi},$$

根据递推公式

$$P_l^m(t)=(-1)^m(1-t^2)^{m/2}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}t^m}P_l(t),$$

其中$P_l(t)$为一般的勒让德多项式。于是

$$P_l^m(\cos\theta)=(-1)^m\sin^m\theta F(\cos\theta),$$

其中

$$F(t):=\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}t^m}P_l(t).$$

因为勒让德多项式

$$P_l(t)=\frac{1}{2^l l!}\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}t^l}((t^2-1)^l)$$

是一个关于$t$的$l$次多项式，从而$F(t)$是一个关于$t$的$l-m$次多项式。因为在$S^2$上$z=\cos\theta$，所以$F(\cos\theta)$是关于$z$的$l-m$次多项式。于是

$$\begin{aligned}
Y_l^m(\theta,\varphi)&=N_l^m(-1)^m F(z)\sin^m\theta\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}\\
&=N_l^m(-1)^m F(z)(\sin\theta\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})^m\\
&=N_l^m(-1)^m F(z)(\sin\theta\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\theta\sin\varphi)^m\\
&=N_l^m(-1)^m F(z)(x+\mathrm{i}y)^m,
\end{aligned}$$

这就说明了对于$m\geq 0$的情况成立。对于$m<0$的情况，与$-m$同理可得，结果可写为$kG(z)(x-\mathrm{i}y)^{|m|}$。证毕。

## 无穷维坐标与帕塞瓦尔公式

假设我们有一组希尔伯特（范数完备的内积空间）空间$X$上的规范正交系$(e_i)_{i\geq 0}$。对于任意一个点$f\in X$，我们可以将$f$写为如下形式（定义与为什么可以这样做的证明稍繁琐，可以参考任意泛函分析教材，不详细展开了）：

$$f=\sum_{j=0}^{\infty}a_j e_j,$$

写成无穷维坐标形式即$(a_0,a_1,a_2,\ldots)$. 利用规范正交系的性质我们可以得到

$$\langle f,e_i\rangle=\sum_{j=0}^{\infty}a_j\langle e_j,e_i\rangle=a_i,$$

以及内积空间上的勾股定理的推广**帕塞瓦尔等式**

$$\|f\|^2=\langle f,f\rangle=\sum_{j=0}^{\infty}\langle a_j e_j,a_j e_j\rangle=\sum_{j=0}^{\infty}|a_j|^2.$$

对于球谐函数系，即$X=L^2(S^2)$，我们可以写成

$$f=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}a_l^mY_l^m,$$

以及帕塞瓦尔等式

$$\|f\|^2=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}|a_l^m|^2.$$

球谐系数

$$a_l^m=\int f(w)\overline{Y_l^m(w)}\,\mathrm{d}w.$$

## 球谐函数（实数形式）

复数形式的球谐函数一般而言并不好用，就比如上面计算系数的积分，如果球谐函数是实值的，能省下很多麻烦。

我们用球谐函数的复数形式的$Y_1^1,Y_1^0,Y_1^{-1}$举例如何构造实值球谐函数。前面我们已经证明了它们满足规范正交系的性质，我们任取$Y_l^m$，$l\neq 1$。这时候一定有

$$\langle Y_l^m,Y_1^1\rangle=0,$$
$$\langle Y_l^m,Y_1^0\rangle=0,$$
$$\langle Y_l^m,Y_1^{-1}\rangle=0.$$

也就是说，对于函数$f$，如果满足

$$f=c_{-1}Y_1^{-1}+c_0Y_1^0+c_1Y_1^1,$$

那么

$$\langle Y_l^m,f\rangle=0.$$

如果我们从全体可以写为$c_{-1}Y_1^{-1}+c_0Y_1^0+c_1Y_1^1$的函数（即$Y_1^m$张成的线性子空间）中，重新选出三个相互正交的、实值且范数为1的函数来替代掉原本的三个$Y_1^m$，这样构造的“球谐函数族”仍然是规范正交基，虽然它可能不再是物理或数学上普遍使用的球谐函数。

实际上这样做的时候，我们总是把$Y_l^m$和$Y_l^{-m}$这一对函数按照上面的方法重新选择。注意到$Y_l^m$与$Y_l^{-m}$形式非常相似，我们总是可以将它们 两个作为一对派生出新的另一对 ，比如相加之后除以$\sqrt{2}$再取虚（实）部，相减之后除以$\sqrt{2}$再取实（虚）部。另外，$Y_l^0$总是实值的，不需要重新选取。以及，$-Y_l^m$总是可以替换掉$Y_l^m$。

上面的讨论说明了实值球谐函数的选取方式非常多，主要看实际应用中你想如何定义它。实值球谐函数的例子，可以参考 en wiki 的实值球谐函数表。

## 投影

对于任意一个定义在球面$S^2$上的函数$f$，我们有分解

$$f=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}a_l^mY_l^m,$$

如果我们只取其中的前几层，比如$l\leq 2$，就得到了$f$对子空间的**投影**

$$f_p=\sum_{l=0}^{2}\sum_{m=-l}^{l}a_l^mY_l^m.$$

$f_p$是在$l\leq 2$的所有球谐函数张成的空间里，**最接近** $f$的那个。因为根据帕塞瓦尔等式

$$\|f - f_p\|^2 = \sum_{l=3}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} |a_l^m|^2,$$

对于$l \leq 2$球谐函数张成的子空间，这一差值的范数至少是$\|f - f_p\|^2$.可以注意到，如果层数$l$取值越大，$f_p$对$f$的逼近就越好。

在图形学中我们一般用投影$f_p$来代替原本的$f$，这样做一是因为我们不可能算出无穷个球谐系数$a_l^m$，二是取前几层得到的投影在大多数情况下，已经非常近似于原本的$f$。

## 球谐函数的旋转

根据 **施密特正交化**，我们总是能轻松构造出一组规范正交基，除了球谐函数，当然也可以选择别的规范正交基来做分解。使用球谐函数是因为它们的另一个优秀性质：快速旋转。

考虑一个旋转$R$。$f$与旋转$R$的复合，仍然是一个定义在$S^2$的函数。

对于$Y_l^m$与$R$的复合，必然也有

$$Y_l^m \circ R(\theta, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=-k}^{k} b_{l,m,k}^n(R) Y_k^n(\theta, \varphi).$$

但是，对于球谐函数而言，实际上可以写成

$$Y_l^m \circ R(\theta, \varphi) = \sum_{n=-l}^{l} b_{mn} Y_l^n(\theta, \varphi),$$

其中$b_{mn}$和$R$有关。也就是说，第$l$层的球谐函数与任意旋转的复合，仍然在第$l$层球谐函数张成的子空间内。这一性质与三维旋转群$SO(3)$的不可约表示密不可分，严格的证明可以参考 **物理学中的群论**（第2版）。

至于如何解出上述的$a_l^n$，实际上我们可以把它看成解一个$2l+1$元线性方程组，那么我们自然需要$2l+1$个方程。取$2l+1$个不同的球面上的采样点$(\theta_i, \varphi_i)$，$i = -l, \ldots, l$，得到$2l+1$个等式：（有的说法是将采样点投影 为球谐系数，这一说法是非常不严谨的。球谐函数分解的是$L^2(S^2)$上的函数，而不是$S^2$上的点）

$$Y_l^m \circ R(\theta_i, \varphi_i) = \sum_{n=-l}^{l} b_{mn} Y_l^n(\theta_i, \varphi_i),\ i = -l, \ldots, l.$$

记矩阵$A = \left(Y_l^n(\theta_i, \varphi_i)\right)_{i,n}$，向量$b_m = (b_{m,-l},\ \ldots,\ b_{ml})^{\mathrm{T}}$，向量$c_m = (Y_l^m \circ R(\theta_{-l}, \varphi_{-l}), \ldots, Y_l^m \circ R(\theta_l, \varphi_l))^{\mathrm{T}}$。则得到方程组

$$Ab_m = c_m.$$

于是（若$A$可逆）

$$b_m = A^{-1} c_m.$$

这个等式只解出了$Y_l^m$的旋转。现在假设我们待旋转的$f$在第$l$层上的球谐系数是$a_l^m$，这一层的投影$f_p$可以分解为

$$f_p = \sum_{m=-l}^{l} a_l^m Y_l^m,$$

则

$$f_p \circ R = \sum_{m=-l}^{l} a_l^m \sum_{n=-l}^{l} b_{mn} Y_l^n = \sum_{n=-l}^{l} Y_l^n \sum_{m=-l}^{l} a_l^m b_{mn}.$$

把所有列向量$b_m$合并，写成矩阵形式$B=(b_m)_{m=-l}^{l}$，同理$C=(c_m)_{m=-l}^{l}$，得到

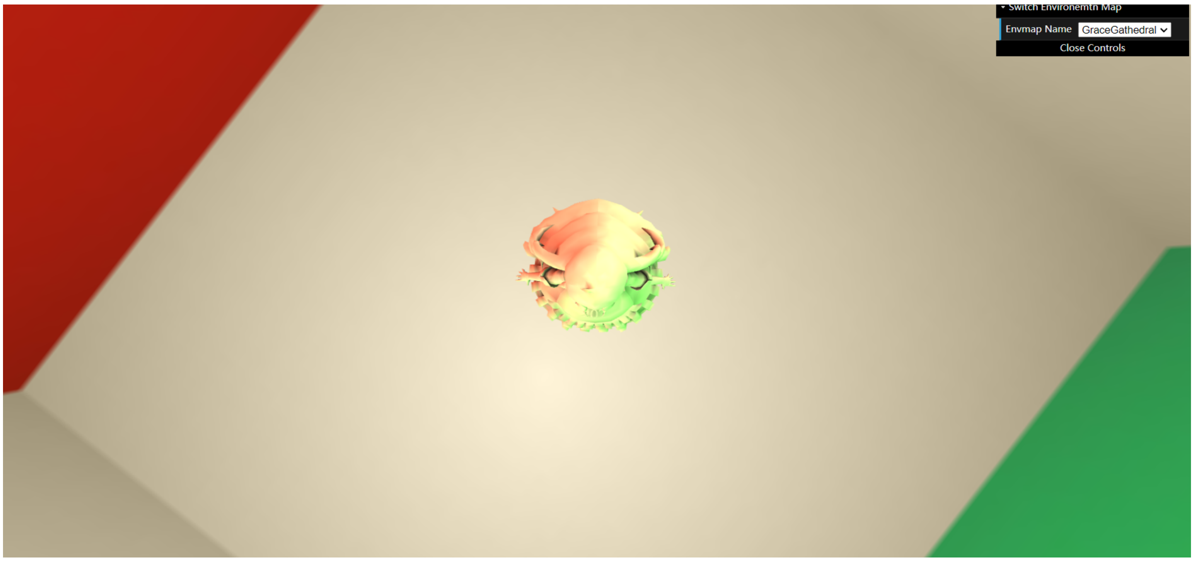
$$B=A^{-1}C$$

$Y_l^n$项新的系数是$\sum_{m=-l}^{l}a_l^m b_{mn}$，写成一列，即为

$$Ba_l=A^{-1}Ca_l.$$

实际应用中，矩阵$A$的值是可以预先算好的，因为$A$与输入的旋转$R$没有关联，也就是说，只要选取的$2l+1$个采样点，能够让算出来的$A$是可逆矩阵，那么这些采样点就是良好的。我们可以直接计算出$A^{-1}$，需要进行旋转时，只需要用$R$计算出$C$，即可得到旋转后的球谐系数。

如果你在别处见到的结果是写成$SA^{-1}$的，而不是$A^{-1}C$，那是因为，在上面的讨论中采用的$A$，相对于那种写法是 转置 过的，这样的目的在于，最终计算时用的是矩阵左乘列向量（数学上比较通用的写法），而不是矩阵右乘行向量。




## 其他分解方式

球面上当然也可以选取其他的方式分解，比如Zonal Harmonics以及Wavelets. Zonal Harmonics是一些特殊的球谐函数旋转后的结果。Wavelets不适合快速旋转，但它应用于高频信息的保留时效果比球谐基好。